INNEHÅLL

MATEMATIKENS MIRAKLER

Det opraktiska är det enda praktiska i längden.

Gunnar Ekelöf 1907–1968
(ur *Färjesång–Variationer*)

Förrädaren

Det sägs att de dränkte honom – ingen kan veta säkert. Det var ju så länge sedan. Men en bra historia behöver inte vara sann, den behöver bara vara sannolik.[2] Att förrädare döms till döden är hur som helst inte osannolikt.

Enligt legenden hette han Hippasos och ingick i ett mäktigt brödraskap som ägde Sanningen. Brödraskapet hade kommit på hur gudarna skapat himmel och jord. Det var med hjälp av Talen – de hela naturliga talen och hela delar av de hela talen. ”Allt är tal”, var deras evangelium. Grundaren till sällskapet var en man vars namn är vida känt och de flesta av oss har någon gång i livet brottats med det han blev mest berömd för; Pythagoras sats.

Hippasos stora brott var att han upptäckte och avslöjade att Pythagoras och brödraskapet hade fel. Att gå mot strömmen och krossa mäktiga sällskaps sanningar är alltid farligt. Pythagoras hade vardagen och verkligheten på sin sida. Han hade rest världen runt och samlat in all känd matematik som användes i handeln med varor, för att bygga hus och mäta mark, fördela och beskatta jord. Överallt fann Pythagoras de hela talen och delar av hela tal. Tal och beräkningar som gav pålitliga och säkra svar på vad varor var värda, vilka vägar fartygen följde, hur hus skulle byggas och hur marken mäts och beskattas. Till och med musiken tycktes följa samma lagar. Tonerna från en sträng som delas på hälften, i fjärdedelar eller åttondelar klingar i harmoni med varandra. Överallt fann han bevis för en världsordning som var byggd på och styrd av hela tal och hela delar av hela tal – de rationella talen; 1, 2 … 1/3, 4/5 och så vidare. I denna världsordning rörde sig också himlakropparna i de rationella talens banor.

Pythagoras nöjde sig inte med att tal och regler fungerade och kunde användas praktiskt – att matematiken var nyttig – han vill också vara säker på att de samband han funnit gällde överallt och för all tid. Han ville ha bevis. Både samband och bevis som kunde gälla så länge evigheten varade. Och att någon som kommit på en evig sanning också tror sig vara gudarna på spåren är förstås inget konstigt.

Syndafallet

Det är här avfällingen och kättaren Hippasos kommer in i bilden. Om gudarna nu har skapat allt i världen med heltal och delar av heltal som mall, då måste man också kunna mäta diagonalen i en kvadrat med samma mått som man mäter sidan. Men det går inte. Om kvadratens sidor är 1 så säger Pythagoras bevis att diagonalen blir ett tal som multiplicerat med sig själv blir 2. I en rätvinklig triangel där det ena av vinkelbenen till exempel är 2 decimeter och det andra benet 3 decimeter så går det inte att mäta upp hypotenusan och se att den har en längd som är jämnt delbart med något av talen 2 eller 3. Den blir ett tal som multiplicerat med sig själv blir 13. Ett sådant tal går inte att hitta bland de rationella talen. Vi skriver det som $\sqrt{13}$. Har man nu byggt sin världsbild, sin makt, och gudarnas och universums existens på att allt kan mätas med samma måttstock ligger man illa till om någon bevisar att man har fel. Det var det Hippasos gjorde – och miste livet.

För hans samtids heltalstroende måste insikten varit minst sagt kuslig och hotfull. Även i dag förefaller det märkligt att det som borde vara det mest självklara, att fem myror är fler än fyra elefanter, inte räcker när vi ska mäta hur lång en sträcka är i förhållande till en annan sträcka. Eller hur lång cirkeln omkrets är mätt med samma mått som diametern. Omkretsen på cirkeln går ju inte heller att beskriva med hela, rationella tal. Diagonalen och omkretsen går bara att beräkna med hjälp av irrationella tal uttänkta i våra huvuden. Tal som ryms i abstrakta symboler som √ och π.

Och trots att de är mänskliga abstrakta konstruktioner, så är de begrepp och symboler som går att hantera enligt bestämda regler vilka förutsäger att en bestämd sak kommer att hända om en viss annan sak inträffar. Händer det att man ritar en cirkel med diametern 1 så inträffar det att omkretsen är 1 x π eller 1 x 3,14 plus ytterligare ett bokstavligt talat oändligt antal decimaler. Detta är vad matematiken handlar om. Vi räknar och vi mäter, och det vi räknar och mäter oss fram till kallar vi för något. Vi ger det abstrakta begrepp och symboler som vi hanterar och manipulerar efter bestämda regler som vi själva bestämmer. Låt vara efter handfasta iakttagelser för hur det blir i verkliga världen.

Också de naturliga talen när vi räknar ut att fem myror är fler än fyra elefanter, är ju abstraktioner i våra huvuden. De är våra mänskliga uppfinningar. Det finns ju dessutom mänskliga kulturer som inte använder tal över huvud taget utan nöjer sig med inget, lite, mycket eller många. Vi som har talen kontrollerar sedan om abstraktionerna gäller för evigt och överallt, och om de kan användas i något annat sammanhang, till exempel att fem myror tillsammans med fyra elefanter blir nio djur och att 5 + 4 alltid blir 9 oavsett vad vi räknar. Vi har också försäkrat oss om och lyckats bevisa för evigheten att alla cirklar, hur stora eller små de än är, alltid har en omkrets som är π gånger så stor som diametern.

Eget liv

Men när abstraktioner och regler väl finns där börjar de leva sitt eget liv. Ur verkligheten är det lätt att abstrahera tal och regler för hur talen ska läggas ihop, dras ifrån, delas och multipliceras. Om man har sex träd och tar bort fem blir det ett träd kvar. Men hur blir det då om man tar bort de konkreta träden från de abstrakta talen? Om man bara har kvar de abstrakta siffrorna? Enligt konstens och matematikens alla regler kan man ju mycket väl tänka sig att ta bort 9 från 7 och få minus 2! *Men vad är mindre än ingenting?*

I den verkliga världen existerar inget som är mindre än ingenting. I matematikens och i talens magiska värld är minustal självklara punkter på en tallinje där de positiva talen ligger till höger om noll och de negativa till vänster. Finns tallinjen? Vadå finns? Och var då? När någon har uppfunnit tallinjen så finns den. Men vad ska man då säga om de imaginära talen. Imaginära? Tal som är oavbildliga och därför osynliga! Tal som multiplicerade med sig självt blir ett negativt tal, mindre än ingenting. De finns ju över huvud taget inte. Under 1500-talet fanns de trots det där – de imaginära talen. För dåtidens matematiker var de både obehagliga och oönskade men samtidigt obevekliga konsekvenser av den inre logiken i matematikens verklighet.

Hur förhåller det sig då med de naturliga talen? Finns de verkligen? Egentligen är de ju bara abstraherade ur det som vi ser omkring oss. Så varför inte betrakta $\sqrt{-1}$, som en abstraktion ur en abstraktion och fortsätta att räkna som om inget hänt? För trots det obehagliga i att föreställa sig något som inte finns och inte syns så kan imaginära tal göras högst synliga. Talen syns i matematikernas egenhändigt konstruerade värld i vad de kallar det komplexa talplanet. Och så fortsätter matematikerna. De börjar med verkligheten som först blir en figur på ett papper, sedan abstrakta tal och symboler som manipuleras efter bestämda logiska regler. Reglerna bildar ett språk som sedan börjar leva sitt eget liv som kan manipuleras och förändras långt bortom allt som har med den ursprungliga verkligheten att göra.

Men hur långt från verkligheten matematiken än rör sig och hur inomvetenskaplig och teoretisk – och onyttig – den än blir så tycks den alltid hitta tillbaka till verkligheten i form av formler och figurer som infiltrerar allt i vår vardag och blir omistliga verktyg i samhällsbygget. De osynliga talen, det komplexa talplanet och den matematik de representerar har exempelvis en självklar roll i Sveriges förvandling från bondeland till industrination. Det var med matematikens hjälp elektroingenjörerna hanterade, manipulerade och konstruerade verkligheten när vattenkraft förvandlades till elkraft. Det låg dock mer än 400 år mellan den onyttiga och obehagliga upptäckten – eller om det nu var uppfinningen – av de imaginära talen och deras praktiska nytta i de beräkningar som handlade om elektriciteten.

Historiens återkomst

Och det är den här historien som upprepar sig gång på gång. Det börjar med ett konkret behov i vardagen och verkligheten. Geometri handlar om att bokstavligt talat mäta jorden. Grova gränser längs mångformade åkrar blir på papper till fina linjer och bestämda vinklar. Det görs mätbart och beräkningsbart. När geometrin går från åkermark till ritbord blir den inte bara abstrakt, den blir också ungefärlig, men det gör ingenting. Så länge jorden är platt och man håller sig på mattan gäller alla de regler och mätningar som ingår i den matematiska grundkursen i geometri. Där är summan av alla vinklar i en triangel 180 grader och där möts aldrig de parallella linjerna. Men vi lever inte på platta landet. Vi lever på runda jorden och i ett universum där allting kröker sig. Ritar man en triangel med basen längs jordens ekvator, ena sidan tvärs igenom Greenwich och den andra tvärs igenom New Orleans får man en triangel med vinkelsumman 270 grader.

Upptäckten att det fanns en helt annan geometri, en där den gamla geometrins regler inte gällde, hade dock inget med verkligheten att göra. Man försökte helt enkelt bevisa att parallella linjer aldrig möts, men det visade sig omöjligt – trots att det verkar både självklart och sant. Denna upptäckt ledde till en jakt på en geometri där allt kunde vara annorlunda och den upptäcktes – eller konstruerades – i början på 1800-talet och kom att kallas för de böjda kropparnas eller det krökta rummets geometri. Det var i Einsteins relativitetsteori som den sedan fick sin absolut största betydelse. Einsteins teori har mer än någon annan fått oss att fundera över om tid, rum, energi och massa verkligen finns som vi uppfattar dem. Med det centrala begreppet det krökta rummet, förstås den geometri som beskriver det och den matematik som beräknar det. Men den ursprungliga upptäckten hade inget med den vardagliga verkligheten att göra.

Sockertopp på väg till rymden

Det krökta rummets geometri upptäcktes 150 år innan vi fick GPS-mottagare i våra bilar. Rösten som nu säger åt oss att ta till vänster i nästa avfart skulle inte kunna göra det utan Einsteins relativitetsteori och den matematik den innehåller. På väg ut i rymden med sina väldiga avstånd och stora hastigheter börjar plötsligt ljusets hastighet, tidens och massan relativitet få praktiska konsekvenser för bilar på jorden. Fast om det kunde man inget veta vare sig vid 1800-talets mitt när de krökta rummens och de krokiga kropparnas geometri såg dagens ljus, eller 1915 när Einstein publicerade sin allmänna relativitetsteori.

Också själva den matematik som fört oss ut i rymden är en oväntad nytta av matematisk problemlösning som inte hade något alls med rymden att göra. Det hela började med Newtons försök att koppla ihop planeternas banor i rymden med banan av en kastad sten på jorden. Den matematiken hade redan då 2 000 år gamla rötter och hade inget som helst att göra med hur stenar flyger genom luften eller planeter rör sig i rymden. Matematiken uppfanns av nyfikna matematiker som ville veta vilka regler som gäller i de figurer som uppstår om man skär ett snitt med lite olika vinklar genom en sockertopp, det vill säga en kon. När man skär sådana snitt skapas cirklar parallella med basen, paraboler parallella med axeln och andra varierande ellipser.

Använder man paraboler och ellipser för att beskriva hur fallande stenar och roterande planeter rör sig så kan man använda tangenter (en rak linje som snuddar parabolen eller ellipsen) för att göra matematik av hur rörelsen förändras i varje punkt längs banan. Detta är det som Newton blivit mest berömd för; den matematik som kan beräkna hastighet och acceleration av kroppar i rörelse. Det är just denna matematik som gjort hela rymdåldern möjlig. Det är nästan hisnande att tänka att Newtons teorier alltså bygger på att någon av pur nyfikenhet ville veta vilken matematik som gäller för de figurer som uppstår när man skär sönder en sockertopp och drar en tangent som snuddar en kurva! I sitt arbete med att skapa en matematik för rymden skriver Newton att han också haft god nytta av ”... monsieur Fermats metod att dra tangenter”.[3]

En gigantisk felbedömning

Pierre de Fermat (1601–1665), som Newton hade god nytta av, hade inte något som helst intresse av någon ”nyttig” matematik när han drog sina tangenter. Han var bara intresserad av matematikens egna inre gåtor som uppstått när talen och symbolerna börjat leva sina egna liv. Fermats garanterat onyttiga matematik har dessutom lagt grunden för en helt annan samhällsrevolution – den digitala. Och han var inte ens matematiker.

Pierre de Fermat var fransk domare men som amatörmatematiker passionerat intresserad av det garanterat mest onyttiga som över huvud taget går att hitta inom matematiken. Godfrey Harold Hardy (1877–1947), en annan lika passionerad matematiker, skriver i boken *En matematikers försvarstal*[4] en lovsång till ”onyttan” av den talteori som var hans och Fermats passion. Hardy är närmast skrytsamt, för att inte säga arrogant, stolt över att den matematik han håller på med är garanterat onyttig. Det är ytterst osannolikt, säger han, att den skulle ha något som helst värde utanför den egentliga ”rena” matematikens område. Hardys bedömning är nog en av vetenskapshistoriens mer gigantiska felbedömningar.

Satser ur den talteori som han och Pierre de Fermat var intresserade av och utvecklade enbart för den intellektuella utmaningens och den egna nyfikenhetens skull, är numera en av grundpelarna i det globala ekonomiska byggnadsverket. En annan del av den historien börjar också för mer än 2 000 år sedan med Euklides i Alexandria. Euklides var matematikern som samlade sin tids kunnande om geometri och talteori i boken *Elementa* som är världens största bästsäljare (*Bibeln* möjligen undantagen). Historien fortsätter på 1600-talet med Pierre de Fermat och slutar på 1900-talet med tre forskare; Ronald Rivest, Adi Shamir och Len Adleman. Med hjälp av matematiska satser som Euklides utvecklades för mer än 2 000 år sedan, respektive satser Pierre de Fermat utvecklade för 400 år sedan, konstruerade de RSA-krypteringen – ett säkert sätt att umgås på internet.

Vårt behov av hemligheter

RSA är en säker, snabb och genial metod att sätta ett säkert lås på ett meddelande jag inte vill att någon annan ska läsa. Och än så länge har ingen kommit på ens en antydan om vilken väg man ska gå för att hitta nyckeln till låset. Att knäcka ett RSA-krypto är i princip lika svårt som att göra fisk av fisksoppa.

Om vi inte hade kunnat behålla hemligheter hade vi inte haft något att berätta. Genom hela vår historia har vi jagat efter oknäckbara koder som ska hjälpa oss att skriva hemliga meddelanden med. Alla dessa historiska exempel på aldrig så avancerade sätt att kryptera har haft samma gemensamma svaghet – nyckeln. Den som krypterar och skickar iväg ett meddelande måste kryptera det med samma nyckel som den som tar emot måste använda för att låsa upp. Det betyder att man i hemlighet också måste dela med sig av nyckeln. Enda sättet att göra det helt hemligt och fullkomligt säkert är att alla invigda träffas och kommer överens. Det är kanske inte så svårt två människor emellan, men om de man vill tala med är hundratals människor? Det kanske är befälhavare, kunder eller affärspartners spridda över jorden och post, telefon, telegraf, radiosändningar och datorlänkar är under ständig attack av folk som jagar och knäcker koder. Att skapa egna, fånga upp och knäcka andras krypteringskoder har varit och är en livsviktig och tungt prioriterad verksamhet både för nationer och multinationella företag. Det är också en enormt komplicerad, dyrbar och tungrodd verksamhet.

Offentlig hemlighet

Med Rivest, Shamir och Adlemans RSA-krypto försvann som genom ett trollslag allt detta. Med RSA kan krypteringen göras med en offentlig nyckel som alla har tillgång till. Helst publicerad på internet. Men avkodningen – dekrypteringen – kan bara göras med en hemlig nyckel hos den som tar emot budskapet. Det låter som rena frälsningen för en värld som törstar efter snabba och säkra sätt att använda ett globalt universellt elektroniskt nätverk. Och det ger gott fog för att dela in tideräkningen på nätet i tiden *före* RSA och *efter* RSA.

Under tiden före RSA var alla som ville kommunicera i hemlighet tvungna att ha tillgång till samma hemliga nyckel. Den principen har gällt i flera tusen år. Med den låser vi in – krypterar – våra meddelanden i virtuella sprängsäkra boxar med dyrksäkra lås och skickar iväg dem. När lådan väl är framme dekrypterar mottagaren lådan med sin egen kopia av krypteringsnyckeln och läser brevet. Med RSA-kryptot blir det låset som är det intressanta – inte nyckeln. Så här fungerar det; först konstruerar jag ett hänglås som kan låsas utan nyckel. Låsen skickar jag sedan iväg med bygeln öppen till alla jag vill ha hemliga besked från. De skriver sina meddelanden, lägger dem i en låda, sätter på låset och knäpper igen. Sedan skickar de tillbaka lådan till mig i den trygga förvissningen att ingen annan än jag som har nyckeln till låset kan öppna och läsa vad som ligger i den. Det är en fullständigt genial idé, men i praktiken helt ohanterlig om inte lås och nycklar kan förvandlas till matematiska formler. Det är vad RSA-krypteringen handlar om.

Dårarnas beskyddare

Uppfinningen av RSA skedde förstås inte utan en förhistoria med andra avgörande personer och insatser inblandade. En av dessa personer är Whitfield Diffie. Han insåg tydligare och tidigare än alla andra att möjligheterna på internet skulle skapa en enorm efterfrågan av en enkel, smidig och billig metod för att kryptera meddelanden. Tillsammans med två andra forskare vid namn Martin Hellman och Ralph Merkle kom han också på en metod där ingen behövde byta nycklar med varandra för att skicka hemliga meddelanden. RSA:s förhistoria rymmer samma detaljer som förhistorien till nästan alla andra vetenskapliga och teknologiska genombrott. De bygger på föregångarnas enorma och tidsödande ansträngningar. Många gånger är de gjorda av enskilda människor och små grupper som betraktas med misstänksamhet av kolleger och omvärld eller helt enkelt bedöms hålla på med fullständigt ointressanta frågor. Martin Hellmans berättelse om hans arbetsgrupps vedermödor och drivkrafter är giltig långt utanför gruppens eget forskningsområde. Den gäller överallt där nyfikna och ofta djupt originella människor försöker komma på något helt nytt. Och göra det efter eget huvud:[5]

> Ralph var liksom vi inställd på att göra bort sig. Och för att nå toppen när det gäller utveckling av grundforskning måste man vara lite dum, för det är bara de dumma som försöker en gång

> till. Man får idé nummer ett och hetsar upp sig och blir ivrig; och så spricker den. Så får man idé nummer två, man blir upphetsad; och så spricker den … Idé nummer nittionio, man blir ivrig; och så spricker den. Bara den som är korkad blir eld och lågor inför den hundrade idén, men det måste till hundra idéer innan någon verkligen lönar sig. Är man inte korkad nog att ständigt bli ivrig har man ingen motivation, då får man inte energi nog för att genomföra det hela. Gud är de dårars förmyndare.

Den idé och metod Diffiegruppen så småningom värkte fram byggde på öppna lås som alla kunde känna till. Alltså att man i full offentlighet kunde komma överens om en hemlighet! ”Det är en av de mest överraskande upptäckterna i vetenskapens historia”, skriver Simon Singh i *Kodboken*[6] när metoden dök upp i offentligheten 1976. Men trots sin genialitet var metoden alltför omständlig för att få något verkligt genomslag. Den byggde på att bägge parter måste sända samma budskap fram och tillbaka mellan sig och kryptera respektive dekryptera det i flera steg. Whitfield Diffie kom till slut fram till en princip som borde kunna fungera med bara två steg. Ett där budskapet krypterades med en öppen kod som alla kunde läsa, och ett andra steg som dekrypteras med hjälp av en hemlig nyckel som bara mottagaren kände till. Det låter som en trollkonst i den högre Harry Potterska skolan, men är en konkret och synnerligen användbar praktik.

Men det blev alltså gruppen Rivest, Shamir, Adleman som sedan skulle fullfölja Diffies idé till ett användbart verktyg på nätet. Ett verktyg som nu används varhelst webbadressen https:// dyker upp.

Allt handlar om primtal

Krypteringen handlar först och främst om primtal, alltså tal som inte går att dela med några andra tal än 1 och sig själv. De primtal som är självklara och överblickbara för oss börjar med 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 och så vidare. Krypteringen går ut på att man multiplicerar två primtal med varandra. Då får man ett nytt tal, exempelvis 11 x 19 vilket ger produkten 209. Och om någon ser själva talet och vill lista ut vilka två primtal jag har multiplicerat för att få siffran 209 finns det metoder för att enkelt räkna ut det. Här finns ju inte så många primtal att välja på. Men om produkten är 1 096 753 067 är det inte lika lätt att komma fram till vilka primtal jag multiplicerat. Hemligheten döljer sig bland cirka 10 000 primtal, och någonstans bland dessa finns två som multiplicerade med varandra ger just produkten 1 096 753 067. Men vilka?

Det öppna lås som jag lägger ut på min hemsida är alltså det tal jag kommit fram till genom att multiplicera två primtal med varandra. Vilka dessa primtal är håller jag och min dator noga för oss själva. Den som vill skicka ett hemligt meddelande till mig sätter in mitt öppna tal i sin egen krypteringsformel som sedan krypterar och låser meddelandet. När det väl är gjort kan inte ens han själv läsa vad han har skrivit – primtalen jag använt för att konstruera mitt lås känner ju ingen annan än jag själv till.

En dator provar sig förstås snabbt fram till vilka två möjliga primtal jag använde när jag gjorde min nyckel i det här exemplet. I det verkliga livet hos banker, kunder och betalkort på nätet väljer man så stora tal att inte ens världens superdatorer i samverkan kan hitta primtalen som använts. Matematiken bakom RSA innehåller förstås många fler detaljer och mer komplexa operationer än så här, men det är just de hemliga primtalens oåtkomlighet som är själva kärnan i operationerna. Framtidens supersnabba kvantdatorer kommer kanske att kunna räkna sig fram till näst intill oändligt stora primtal, men än så länge surfar vi – relativt – säkert.

Man kan förstås inte säga att forskningen som lett till RSA gett någon *oväntad* nytta. I hela kedjan var ju alla just på jakt efter något som skulle kunna vara nyttigt och leda till bekväma, snabba och säkra krypton för en värld som lever sitt liv på nätet. Det är värt att ha i åtanke att detta är ett elektroniskt nät där det bara i det svenska banksystemet omsätts 600 miljarder kronor per dag och i det globala ofattbara ett par trillioner US$. Genom det internationella nätverket för banktransaktioner, SWIFT, flyter kanske mer än hälften av världens samlade bruttonationalprodukt. Men de matematiska samband och bevis som behövdes för att utveckla RSA hade upptäckts långt tidigare av matematiska tänkare som inte hade en tanke på vad de skulle kunna användas till. Tala om oväntad nytta.

Gudomliga Google

På liknande sätt förhåller det sig med Google. Hur kan det komma sig att Google (nästan alltid) hittar rätt? Matematik förstås. En matematik som inte bara beräknar hur många länkar som finns till en viss sida, utan Google räknar också ut hur många länkar det finns till de sidor varifrån de första länkarna kom. Det betyder att sidorna inte bara rangordnas efter hur ofta någon länkat till dem utan också bedömer hur ”värdefulla” länkarna är, det vill säga om de kommer från sidor som i sin tur har många länkar till sig. En länk från en sida med många länkar är alltså mer värdefull än många länkar från en sida med få länkar. Därmed skapar Google en rangordning, en så kallad Page Rank, mellan sidor som kan tänkas passa in på det jag söker efter. Med det ökar förstås chansen väsentligt att jag i den lista Google presenterar också verkligen hittar det jag söker efter.

Den matematik Google använder utvecklades för snart 100 år sedan av två matematiker, Georg Frobenius (1849–1917) och Oskar Perron (1880–1975). Deras forskning hade förstås inte någon som helst anknytning till vare sig Google eller internet. Den hade över huvud taget inget med vår vardagliga fysiska värld att göra – garanterat onyttig matematik alltså. Den matematik som Frobenius och Perron intresserade sig för hade förvisso sitt ursprung långt bakåt i historien i praktiska problem. Den matematiken hade dock för länge sedan börjat leva sitt eget liv som matematiska formler och samband som Frobenius/Perron undersökte och skapade nya samband och formler ur. Och nu gör de sig nyttiga varenda gång någon trycker ”sök” på Google. En nytta som i dag ger Google ett börsvärde på över 150 miljarder dollar.

Att matematiska samband, formler, satser och teorier som utvecklats av matematiker av ren och skär nyfikenhet och bara för matematikens egen skull, hittar nya tillämpningar i datorernas värld är kanske inget att bli förvånad över. En dator är ju inget annat än en maskin som hanterar matematik – ettor och nollor. Hela datorvärlden, inklusive hela nätet, dess inre liv och verklighet, är ju inget annat än matematik – eller i alla fall beräkningar. Pythagoras ler säkert igenkännande i sin himmel. I elektronikens virtuella universum är verkligen allting tal – och det är vi som är gudarna som både har uppfunnit och hanterar talen.

Mästerskräddarna

Lite svårare att fatta är varför matematik som utvecklas av samma skäl – ren teoretisk nyfikenhet och helt och hållet bara för sin egen skull – kan ha något som helst med den fysiska vardagen att göra och ha någon praktisk nytta i den verkliga världen. Kanske är det en slump. Ungefär som om en skräddare när han väl kommit på hur man ska skrädda fortsätter att skrädda bara för skräddandets och den kreativa glädjens skull. Förr eller senare skräddar han något som passar någon. Om tillräckligt många matematiker håller på tillräckligt länge med att tänka tillräckligt djupt så måste det helt enkelt till slut dyka upp matematiska satser och samband som beskriver någon del av vad som händer i den praktiska världen.

Så där ligger de, alla dessa vidunderliga matematiska kostymer och kreationer, alla skapade för sin egen skull, och bara väntar på att bli upptäckta av fysiker, biologer, kemister, astronomer, meteorologer, läkare och ingenjörer. Alla på jakt efter matematik och beräkningsmetoder som kan berätta om missilernas flygvägar, materialens hållfasthet, luftens motstånd, bakteriernas tillväxt, svininfluensans spridning, klimatets förändringar, befolkningens tillväxt, ekologins dynamik, genernas ringdans …

Detta betyder rimligen att matematiken också har rätt många lik i garderoben. Eller åtminstone en hel del fullständigt oanvändbara kreationer i sina gömmor – hur fantastiska och konstfulla de än är. Också en hel del som inte ens duger att ta fram till de egna festerna. Problemet är ju att ingen kan veta i förväg vad som är vilket. En del mästermatematikers kreationer har ju fått vänta i mer än 2 000 år på att någon ska upptäcka den vardagliga nyttan med dem.

Att vi andra också hittar vad vi söker vet vi ju. Hela vår vardag från minsta pixel i kameramobilen till beräkningar av rymdsondernas miljonmilaresor är genomsyrade av beräkningar och matematik. Det betyder också att de krafter och formler som skapar varje liten bit av den praktiska världen där matematiken fungerar i någon mening *är* matematisk, eller kan tvingas in i en matematisk kostym med acceptabel passform. Så kanske hade Pythagoras rätt. Även om det inte var talen som var universums hemlighet utan matematiken.

Matematiken och kristallkulan

Den tycks ju gälla vad forskare än väljer att forska på. Från det allra största till det allra minsta. Vilka fenomen de än hittar och hur långt de än tar sig i både tid och rum så hittar de en matematik som passar till fenomenen, eller så lyckas de få fenomenen att passa in i matematiken.

Men det betyder också att det mycket väl kan finnas olika matematiska vägar att vandra för att kunna göra beräkningar inom en teori och som kan ge mening åt resultat från experiment och iakttagelser. En matematiker når inte sitt mål förrän en matematisk förmodan eller sats är bevisad bortom alla kollegers tvivel och därmed kan upphöjas till ett teorem i evigheten. En fysiker eller biolog kan nöja sig med en matematik som fungerar. En matematik som på ett rimligt sätt kan hantera experimentella fakta så att en hypotes kan förkastas eller förhoppningsvis förvandlas till bekräftad teori. Men det betyder också att alla vetenskaper utom just matematiken är de preliminära sanningarnas evigt oavslutade projekt.

Det kan alltid dyka upp en ny matematik, nya experimentella fakta som ger nya hypoteser som till slut landar i en ny teori. Hela den fysiska världen är bokstavligt talat en gränslös komplexitet av sam-, med- och motspelande delar och krafter. Därmed är det egentligen förunderligt, ja närmast mirakulöst, att vi över huvud taget kan förutsäga något alls om naturen. Än svårare är det att förstå att vi kommit på en abstrakt matematik som är så obegripligt effektiv i att beskriva hur fysiken (och naturen) fungerar. Det gäller ju särskilt som matematikens samband, formler och begrepp upptäckts och utvecklats i sin egen värld. Det är med matematikens hjälp vi beskriver världen och planerar vardagen. Den fungerar till och med i den minsta av alla världar. I elementarpartiklarnas och kvantmekanikens till synes slumpmässiga och oförutsägbara värld finns det också en matematik som kan beräkna oberäkneliga fenomen.

En elementarpartikel kan aldrig bestämma sig för var eller vad den är utan är både partikel och våg, överallt och samtidigt. Att kunna vara överallt samtidigt kallar fysikerna för att ha en superposition. Att vara överlagrad. Det är denna överlagring eller superposition som ”kollapsar” när någon försöker se hur den ser ut, och då får han eller hon ett värde både på var och vad. De första inblickarna i elementarpartiklarnas och kvantmekanikens värld kom under 1900-talets första hälft. De matematiska regler som en av kvantmekanikens centralfigurer Werner Heisenberg (1901–1976) då använde för att göra allmän teori av sin iakttagna praktik hade förstås inget med kvantmekanikens spöken att göra. Till berättelsen hör att det dessutom fanns en helt annan gren av matematiken som också kunde användas för att hantera samma praktik och få fram samma teori. Reglerna hade släktskap med varandra. Det var därför man upptäckte att bägge dög till samma sak.

Den matematiken var dock lite annorlunda, men enklare att räkna med. Och det är nu miraklet inträffar.

Matematikens mirakel

De nya upptäckterna inom matematiken gav mycket bättre och ett mer allmängiltigt svar på vad som skulle hända när superpositionen kollapsar. Svaren gällde alla elementarpartiklar och inte bara för den partikel som teorin ursprungligen handlade om. Ingen kan förklara varför – det bara är så. Man hade alltså hittat en färdig matematik som utvecklats för sin egen skull men kunde användas för att förstå nya erfarenheter. En matematik som till och med antydde att kvantmekanikens och elementarpartiklarnas spöken dessutom skulle kunna visa sig i skepnader som man dittills inte sett röken av i några experiment. Skepnader och fenomen som skulle visa sig först i nya experiment.

För vår del är det tur att de här miraklerna faktiskt finns även om ingen kunnat förklara varför. På gott och ont är bilden på atomen med sin kärna omsvärmad av sina elektroner 1900-talets bild framför alla andra. Utan den matematik som kunde beskriva och förutsäga atomens ordning och uppförande hade det inte blivit någon atombomb, men heller ingen kärnkraft. Framför allt hade det inte blivit något IT-samhälle. Vad vi än gör i dag som har någon som helst koppling till den elektroniska världens ettor och nollor så finns där en koppling till kvantmekanikens bisarra värld och den matematik som beskriver och förutser hur den beter sig. Det gäller allt ifrån ultrasmå hårddiskar, minsta pixel i kameramobilen och sjukhusens väldiga magnetkameror, till det globala fibernätet runt jorden och satelliterna utanför den. Det gäller också för vad vi i dag förstår av de kemiska reaktionernas inre krafter och arvets molekyler, makt och mekanismer. De som lärt oss att allt liv på jorden har ett gemensamt ursprung och tillhör samma gengemenskap.

Detta var dock inte något som matematikerna tänkte på.

De var bara upptagna av att jaga den vackra matematiken. Den som plötsligt och på ett oväntat och elegant sätt visade på överraskande samband mellan olika matematiska konstruktioner. Byggen som ingen dittills hade trott hade något med varandra att göra. Om matematikerna inte hade ägnat sig åt detta hade vi andra – och de själva – inte heller fått någon oväntad nytta av jakten på skönheten.

Skönheten och odjuret

Så vilka skönheter är dagens matematiker på jakt efter? Och vilka odjur? I historieberättandet runt matematikens historia återkommer ständigt samma historia. Historien om skönheten och odjuret. Om den sköna obefläckade och garanterat onyttiga teoretiska matematiken och den lite mindre vackra tillämpade och nyttiga. Ingen matematiker av i dag ställer förstås upp på en så enkel motsatsbeskrivning. Historien har ju också visat på en ständig pendelrörelse mellan den ”rena” matematiken och den matematik som kan användas för att förklara och hantera vardagen. All vacker matematik – den som på ett överraskande och enkelt sätt lyckas lösa sin tids stora matematiska utmaningar – tycks ju förr eller senare också leda till oväntad nytta. Detta är ett djärvt påstående och självklart inte mitt, men källorna är för många och för djupa för att peka på någon särskild. Det är dock viktigt att komma ihåg att all teoretisk matematik inte leder till vackra resultat. Mycket matematik, som mycket annan vetenskaplig verksamhet, leder ingenstans alls. Men hur ska man i förväg veta vilken som är vilken? Hur vet man vilken matematik som aldrig kommer att bli annat än ett bevis för människans matematiska förmåga och hur vet man vilken matematik som blir till RSA-krypton och sökmotorer på nätet värda miljarder? Eller vad som blir matematik för en fysik, kemi eller biologi vars värde helt enkelt inte går att beräkna och har gett oss en hel ny värld?

Detsamma gäller även för litteratur, teater, film och musik, eller allt annat som vi betraktar som konst. Inte heller om konstens värde kan man veta något i förväg. Inte något om vilket verk som spränger gränser, röjer väg och visar oss nya världar. Den metoddrivna ”rena” matematiken är också en del av kulturen. Den är en avancerad konstform på gränsen till vad mänskligt medvetande kan uppfatta och hantera. Det som gäller för den experimentella filmen, måleriet, poesin, litteraturen och aktionskonsten gäller också den ”rena” matematiken. Vi kan aldrig i förväg veta något säkert – beträffande någondera. Ingenting om vad som blir bestående och utvidgar vårt vetande – och ibland till och med blir nyttigt också i någon mer praktisk bemärkelse.

Vad vi däremot kan veta säkert är att utan konsten och kulturen vet och är vi inget alls, åtminstone inte människor. En och annan schimpans kan förvisso måla riktigt intressant abstrakt konst och ha en uppfattning om symboler, tal och mängder, men ingen apa tar ett steg tillbaka och betraktar sitt verk och funderar över om det är vackert eller sant. Inget annat djur än människan funderar över vad som händer om man i en hög med tre bananer försöker sno åt sig fyra? Eller om någonting kan vara mer – eller mindre – än ingenting.

Hilberts lista

Den 8 augusti 1900 ställdes den sköna matematiken inför förra seklets största utmaningar. På en världskongress för matematiker formulerade David Hilbert (1862–1943) en lista på 23 matematiska problem, förmodanden, som han ansåg vara den sköna matematikens viktigaste uppgifter att lösa under de närmaste 100 åren. Seklet var nytt, staden Paris och Hilbert en karismatisk och beundrad matematiker. Hans kändisskap bidrog förstås till att hans 23 problem fick sådan spridning. Ett av Hilberts problem, nummer 2, skulle bli mer allmänt känt också för den dramatik det bar på.

Enkelt beskrivet handlar detta problem om att Hilbert var övertygad om att det borde gå att bevisa att matematiken inte innehåller några motsägelser. Eller för att säga det lite mer sofistikerat men ändå mycket förenklat; han var övertygad om att all matematik i grunden går att formalisera med hjälp av ett antal axiom – överenskomna grundsatser – som inte innehåller några självmotsägelser. Axiom som inte innehåller några andra symboler, begrepp eller regler än de som ryms inom matematiken själv och att de matematiska satser som formaliserades inom systemet också skulle kunna bevisas vara helt motsägelsefria! Två tusen år tidigare hade en annan matematiker formulerat en förmodan som han också trodde vara sann, motsägelsefri och bevisbar – att allt var tal – sedan dök Hippasos upp och krossade den förmodan.

1930 krossades Hilberts dröm av Kurt Gödel (1906–1978) när han lade fram ett bevis för att det inte går att bevisa att matematiken är motsägelsefri. Det betyder förstås inte att matematiken måste vara full av motsägelser, men det betyder att vi aldrig i strikt mening kan vara säkra på att den inte innehåller motsägelser – det går helt enkelt inte att bevisa.

Gödel visade också att det i ett matematiskt språk finns matematiska satser som är sanna men obevisbara inom språket. Och Gödels bevis är generellt – det bevisade att alla formella system som är tillräckligt stora för att rymma aritmetiken alltid innehåller satser och påståenden som är matematiskt sanna men som inte går att bevisa inom systemet. Det är inte underligt att Gödels bevis skickade ut matematikerna på ett gungfly – det var ju deras värld hans ”ofullständighetssats” handlade om. Men Gödels ofullständighetssats skapade oro också i den vanliga världen. Till exempel bland människor som var övertygade om att Gud var matematiker och att en fullkomlig skapelse naturligtvis måste bygga på en fullständig matematik. Satsen har också använts som argument för att människor inte är maskiner. Om allt detta säger Gödels satser förstås ingenting. Men det tillhör också vetandets oväntade vägar – att brukas och missbrukas för att förstärka eller rasera våra favoritföreställningar och om hur världen hänger ihop.

Den stora skillnaden i detta nutida matematiska drama mot det antika dramat med Hippasos och Pythagoras i huvudrollerna är att huvudpersonerna den här gången spelade sina roller helt i enlighet med de scenanvisningar som gäller för vetenskapliga dramer. Det var ju Hilbert själv som hade inbjudit till kritisk granskning av sin egen övertygelse, och Gödel – som lyckades bevisa att Hilberts dröm om en logiskt säker matematik var felaktig – slapp dela Hippasos öde. Kurt Gödel tillhör en av de få matematiker som riktig många människor lärde sig namnet på redan under hans livstid.

Millenniets matematik

Vårt sekels Hilbert heter Landon T. Clay. Åtminstone i den bemärkelsen att han har tagit på sig att formulera vår tids matematiska problem. Någon matematiker är han dock inte. Clay är en mycket förmögen amerikansk finansman som tjänat pengar på att förvalta andras pengar, men han förvaltar också ett passionerat intresse för ”ren” matematik. Han anser att den rena matematiken får alltför lite pengar och vill själv bidra till att den utvecklas och sprids. Därför bildade han en stiftelse för att råda bot på detta. Med Hilberts problem som förlaga har Clay Mathematics Institute beskrivit 7 matematiska problem för 2000-talet – millenniets matematik. Varje problem ger 1 miljon dollar till den som löser något av dem. Hittills är bara ett problem löst och ett pris utdelats. Problemet heter Poincarés förmodan och pristagaren Grigorij Perelman.

Ett av de ännu olösta problemen handlar om den matematik som krävs om man vill göra fisk av fisksoppa, det vill säga de matematiska verktyg RSA-krypteringen använder.

Metaforen haltar möjligen en smula men visar något vad det handlar om. För att kunna knäcka ett RSA-krypto måste man kunna lista ut vilka ”fiskar”, alltså de primtal, som jag blandar ihop till den ”fisksoppa” som blir mitt öppna lås. Att lista ut de ursprungliga primtalen och ta bort dem från den slutliga ”soppan”, och därmed blottlägga den hemliga texten, något som inte ens världens samlade och snabbaste datorer klarar om de så arbetar i tusentals år. Kanske kan någon komma på en matematik som hittar någon genväg? I lösningen på ett av Clay-problemen döljer sig den möjligheten. Den som löser problemet blir inte bara en miljon dollar rikare och vinner evig berömmelse. Möjligen drabbas hon eller han också av fördömelse. Lösningen skulle ju tvinga hela det globala finansiella säkerhetssystemet, och alla andra som vill kommunicera utan insyn, att hitta ett nytt ännu säkrare sätt att kryptera transaktioner och hemliga meddelanden på nätet.

I matematikens virvlar

Vindens virvlar och vattnets väg finns också med på Clays lista. Här i form av drömmen om lösningen på Navier–Stokes ekvationer (som fått sitt namn från Claude-Louis Navier och George Gabriel Stokes). Navier–Stokes ekvationer används redan av tiotusentals ingenjörer jorden runt för att beräkna konsekvenserna av vindens virvlar över vingen på ett flygplan, luftens vägar i atmosfären, oljeflöden i en ledning, vattenkraftens utbyggnad, vädrets utveckling, klimatets förändringar och havets strömmar. Kort sagt allt som flyter och flödar och är en minst sagt nyttig matematik. Ekvationerna rymmer också stora nya matematiska utmaningar. Även om de redan nu används och i en ”mjuk” mening har lösningar i de praktiska fall där de används, så har ingen kunnat visa på lösningar som gäller i en ”hård” och omutlig mening i tre dimensioner och verkligen säger något pålitligt om hur världen fungerar.

Som inom-matematiskt problem är en sådan lösning mer än väl värd sitt Clay-pris på 1 miljon dollar. Men för den som eventuellt lyckas är det inte bara pengarna som lockar. Framgången skulle få enorm betydelse för allt som flyger, flyter eller rör sig i rör, luft eller vatten. Till exempel skulle NASA slippa bygga jättelika vindtunnlar för att testa om nästa generations rymdfarkoster verkligen tål att flyga ut ur och in i jordens atmosfär. De skulle kunna lita på att datorernas matematiska simuleringar gav tillräckligt pålitliga svar för att kunna skrota vindtunnelexperimenten. Det som lockar en matematiker är det matematiska. Det är i den världen han hittar sin belöning i glädjen av att ha klarat en utmaning, når erkänsla, berömmelse och kollegernas respekt. Att andra får någon nytta av resultatet är förstås inte fel men har mindre – om ens någon – betydelse för den inom-matematiska forskaren.

Försvarets behov

Detsamma gäller förstås också det problem som kallas matematikens heliga Graal, Riemann-hypotesen, som först formulerades av Bernhard Riemann år 1859. Hypotesen finns med på Hilberts lista från förra sekelskiftet och på Clays lista från det senaste sekelskiftet. Ännu mer intressant är att Riemann-hypotesen finns med på DARPA:s lista över 23 matematiska utmaningar med det mäktiga målet att: " … dramatiskt revolutionera matematiken och därmed stärka försvarsdepartementets vetenskapliga och teknologiska kapacitet."[7]

DARPA är det amerikanska försvarsdepartementets (DOD) Defense Advanced Research Project Agency. För den som kan sin IT- och internethistoria är förkortningen DARPA mer än välbekant. Det var inom DARPA som föregångaren till internet, ARPA-net, utvecklades – även då med hjälp av matematik som utvecklats till helt andra ändamål. En tydligare förhoppning om att kunna koppla ihop ren teoretisk inom-matematisk forskning med drömmen om en praktisk tillämpning, är väl svår att tänka sig. Skönheten och Odjuret i Riemanns och DARPA:s – den militära forskningens – skepnader. Och så ser förstås den mesta vetenskapliga kunskapen ut. I sig själv är den skön. I vilken kategori den sedan hamnar bestämmer vi själva. På DARPA-listan återfinns flera av de matematiska problem som finns på Clay-listan. Och den listan är ju bara avsedd för de verkligt sköna, svåra och djupa inom-matematiska problemen.