

# Innehåll

## Förord

## Inledning: Exiler 11

- 1 En platonist bland positivisterna
  - Den första kärleken* 47
  - Bort från den gamla röran: en stad på jakt efter nya grunder* 60
  - Wienkretsen* 65
  - Wienkretsens rollista* 71
  - Noch einmal: människan är alltings mått* 74
  - Wittgenstein och Wienkretsen* 79
  - Vad man icke kan tala om* 90
  - Gödel i Wienkretsen: en tyst olikänkande* 96
  - Gödel och Wittgenstein* 99
  
- 2 Hilbert och formalisterna
  - En matematikers intuition* 107
  - Matematiken blir formell* 120
  - Hilberts andra problem: aritmetikens konsistens (det viktigaste bevis som aldrig blev av)* 124

3	Ofullständighetsbeviset	
	<i>Gödel i Königsberg</i>	129
	<i>Gödels första stora förbisedda ögonblick: en långtifrån trivial trivialitet</i>	131
	<i>Den tystaste av explosioner: Gödel tillkännager sitt resultat</i>	136
	<i>Von Neumann fattar vinken</i>	141
	<i>Det första ofullständighetsteoremet: övergripande strategi</i>	144
	<i>Steg ett: lägg upp ett formellt system</i>	148
	<i>Steg två: gödelnumrering</i>	149
	<i>Steg tre: skapa en sats som är sann eftersom den säger att den är obevisbar</i>	155
	<i>Det andra ofullständighetsteoremet</i>	161
	<i>Wittgenstein och ofullständigheten</i>	165
	<i>Ofullständigheten sprider sig</i>	170
4	Gödels ofullständighet	
	<i>Rosa flamingo</i>	181
	<i>”Kaffet är förfärligt”</i>	191
	<i>”Logiken, det gick bara inte”</i>	204
	<i>”Jag kan bara fatta negativa beslut”</i>	214
	<i>Ofullständighet (än en gång)</i>	220
	Noter	229
	Namnregister	239
	Vidare läsning	243
	Tack	247

Men varje misstag beror på yttre faktorer  
(som känsla och uppfostran);  
förnuftet självt gör inga misstag.

– KURT GÖDEL

*29 november 1972*

## Förord

Idén om absoluta gränser för den mänskliga kunskapen är knappast främmande för den västerländska filosofin. Möjligheten att det kunde finnas sanningar som för alltid kommer att undfly vår kunskap har legat på lur i begreppet kunskap alltsedan Platon för första gången skilde skarpt mellan kunskap och blotta åsikter.

Till skillnad från blotta åsikter måste kunskap till att börja med vara sann. Att säga "Min chef vet att  $p$  trots att  $p$  är falskt" är att missbruka verbet "veta". Det som avsågs var snarare "Min chef tror att han vet att  $p$  trots att  $p$  är falskt". Verbet "veta" är en framgångsterm. Den som vet är någon som har en riktig åsikt.

Men framgång – i form av sanning – uttömmar inte allt som ligger i begreppet kunskap. Begreppet implicerar också att den som har kunskap har goda skäl för sin övertygelse. Vi tror – hur irrationella vi än må vara – på grundval av skäl. Kanske finns det vissa övertygelser som är inbyggda i tänkandets själva struktur – till exempel motsägelselagen, som från det att  $p$  är sant låter oss dra slutsatsen att icke- $p$  är falskt. Om vi inte redan från början var utrustade med denna elementära logik är det svårt att se hur inlärningsprocessen någonsin skulle kunna ta sin början. Men i de flesta fall har vi inga medfödda övertygelser, utan bildar dem, och vi bildar dem på grundval av skäl som ter sig tillräckligt över-

tygande för oss – även om skenet ibland kan bedra. Det finns goda skäl för övertygelser, och andra skäl som inte är fullt så goda.

En koppling till goda skäl som stöd för övertygelser ligger alltså också implicit i begreppet kunskap. Om jag ska veta att  $p$  räcker det inte att jag tror att  $p$  och att  $p$  är sant. Mitt skäl för att tro att  $p$  måste ha en särskild relation till sanningen av  $p$ , så att mitt skäl för att tro stödjer sanningen av vad jag tror.

Själva begreppet kunskap lägger alltså ribban högt. Redan i det västerländska tänkandets början öppnade detta filosofernas ögon för möjligheten att mycket som är sant skulle kunna vara principiellt ovetbart. Det skulle kunna finnas sanningar som inte har den särskilda relation till tillgängliga skäl som låter oss bilda övertygelser.

Och naturligtvis har den västerländska filosofin, särskilt den gren som brukar kallas epistemologi (kunskapsteori), ägnat stor uppmärksamhet åt *karaktären* av den särskilda stödjande relationen mellan skäl och övertygelser. Måste skälen för min övertygelse utesluta själva möjligheten att övertygelsen är falsk, eller räcker det om de gör det osannolikt att den är falsk? Om det senare är tillåtet skulle vi kunna ha goda skäl för falska övertygelser. Det förra är därför, om allt annat är lika, mer önskvärt, vilket fick strikta rationalister som Spinoza och Leibniz att kräva det för alla övertygelser som ska ha status som kunskap.

Men för det mesta gav västerländska filosofer upp idén att denna mest önskvärda stödjande relation kunde krävas för kunskap generellt. Om man ställer för stora krav på kunskapen börjar en orimligt omfattande skepticism genast torna upp sig. Begreppet kunskap måste kunna skilja mellan att en person tror, låt oss säga, att "Månens dragningskraft orsakar tidvattnets rörelser" och att hon tror att "Planeternas ställning vid tiden för en persons födelse orsakar grundläggande drag i hennes karaktär".

Skäl för övertygelser som utesluter möjligheten av falskhet kan därför inte krävas för kunskap – det vill säga såvida kunskapen inte avser logik och matematik. Det är inom dessa privilegierade

områden som den särskilda stödjande relationen uppträder, i form av bevis. Ett bevis etablerar sin slutsats slutgiltigt. När ett bevis föreligger är själva möjligheten av falskhet utesluten.

Men på alla andra områden, till och med i de mest exakta naturvetenskaper, har vi funnit oss i att acceptera skäl som fortfarande är förenliga med att det vi tror är falskt. Det är en självklarhet att evidensen för en vetenskaplig teori är förenlig med att teorin är falsk. "Falsifierbarhet" har blivit själva kriteriet för att bedöma om en teori är genuint vetenskaplig, alltsedan 1900-talsfilosofen Karl Popper myntade termen. Men i viss mening uttrycker denna idé om falsifierbarhet bara vad det innebär att en teori är empirisk. Vi kan aldrig ha en teori för vilken den empiriska evidensen utesluter möjligheten att teorin är falsk.

Efterhand som den västerländska kunskapsteorin mognade, parallellt med den mognande vetenskapen, gav den alltså upp strävan att formulera ett enhetligt begrepp om den särskilda relationen mellan skälen för en övertygelse och övertygelsens sanning. I stället lät den relationen förgrenas i två: en relation som krävs för logik och matematik – där ingenting mindre än bevis duger – och en som krävs för all annan kunskap – där bevis är omöjliga och vi måste nöja oss med sannolikhet.

Men även efter att ha sänkt sina krav på kunskapen har västerländsk kunskapsteori fortsatt att fokusera på de eventuella gränserna för mänsklig kunskap. Kom ihåg Humes rungande avslutningsord i *Inquiry Concerning Human Understanding*: "När vi går igenom våra bibliotek, övertygade om dessa principer, vilken förödelse måste vi inte åstadkomma? Om vi tar någon bok i vår hand, till exempel i teologi eller skolastisk metafysik, låt oss då fråga: Innehåller den några abstrakta resonemang om kvantiteter eller tal? Nej. Innehåller den några erfarenhetsbaserade resonemang om fakta och existens? Nej. Kasta den då på elden, för den kan inte innehålla annat än spetsfundigheter och illusioner." En solid kunskapsteori visar hur solida skäl för övertygelser bara kan gälla för vissa typer av sanningar. Det kan mycket väl finnas andra

sanningar, men dem kommer vi aldrig att få veta något om. Vi är till vår natur kognitivt ofullständiga, och ju mer samvetsgranna vi är i fråga om våra övertygelser, desto djupare intryck gör vår ofullständighet på oss.

Den teoretiska fysikens utveckling under 1900-talet och början av 2000-talet har gjort möjligheten av gränser för den mänskliga kunskapen nästan lika påtagligt närvarande inom vetenskapen som den länge varit inom filosofin. Ta till exempel kvantmekaniken: trots sina empiriska framgångar säger den inte vilket slags värld vi lever i utan håller i stället fram radikalt olika möjligheter, av vilka ingen görs mer sannolik än någon annan genom empirisk evidens. Den empiriska evidensen stödjer bara teorin, inte dess tolkning. Vi har Köpenhamnstolkningen, som gör mätningen av en partikel till en ontologisk handling. Vi har Bohmtolkningen, som tillskriver världen icke-lokalitet – vad Einstein kallade ”spöklik verkan på avstånd”. Vi har tolkningen i termer av många världar, som förtingligar varje möjlighet i konfigurationsrymden till en egen, erfarenhetsmässigt sluten värld, så att den värld där vi befinner oss blir bara en i en väldig mångfald betecknad som multiversum.

Dessa är för närvarande de mest populära tolkningarna av kvantmekaniken, men andra är också i omlopp och fler kan tänkas dyka upp. Hur ska vi veta vilken av dessa helt olika världar som faktiskt är den verkliga, om de skäl som ger oss kunskap om kvantmekaniken inte gör någon av dessa tolkningar mer sannolik än de andra?

Men när vi talar om dessa möjliga gränser för kunskaper som naturvetenskapen visar oss, förblir vi ändå inom sfären av det som Hume kallade frågor ”om fakta och existens”. Vi har ännu inte berört – för att återigen låna hans ord – ”abstrakta resonemang om kvantiteter och tal”. Det senare hör till det privilegierade område där det är bevis som gäller. Detta är ett rent begreppsligt område. Och att det är ett rent begreppsligt område är det som gör att det är tillgängligt för bevis. Bevis består i att utveckla innehållet

i begrepp. Tänk på vad ekvationer är och hur man härleder dem.

När det kommer till detta rent begreppsliga område ter sig idén om kunskapens gränser trots allt märklig och främmande. Hur skulle begrepp kunna dölja sitt innehåll för oss? Den fysiska världen kan göra det; och det är just vad den tycks göra, om vi ska rätta oss efter den samtida fysiken (och vad ska vi annars rätta oss efter?) Men den begreppsliga världen? Hur skulle den kunna göra det? Alla sanningar som finns på matematikens privilegierade område måste väl ändå, åtminstone i princip, kunna bevisas?

Nej, det kan de inte. Gödel visade att de inte kan det. Vad Gödel visade är en gräns för bevis. Han *bevisade* en gräns för bevis. Därmed förde han in idén om gränser för våra skäl för övertygelser – gränser som så länge varit välbekanta för filosofer när det gäller frågor om fakta och existens – på det helt annorlunda, *privilegierade* område som utgörs av matematiken. *Detta* var en möjlighet som ingen sedan Platon drömt om – före Gödel.

Ur ett filosofiskt perspektiv är Gödels verk därför ännu mer omstörtande än allt som den moderna fysikens revolutioner tycks lära oss. Inte ens den svindlande tanken på ett multiversum, befolkad av motsvarigheter till var och en av oss, kan riktigt skaka om oss – filosofiskt, menar jag – på samma sätt som Gödels verk gör. Och att han åstadkom denna djupgående omstörtning genom ett bevis ger detta matematiska verk en ironi av ett slag som vi vanligen bara kan njuta av i fantasifulla konstverk.

Även i andra avseenden kan Gödels ofullständighetsteorem leda tankarna till ett konstverk, inte minst genom bevisets skönhet. Ett verk som är både vackert och säger något om människans predikament: sådana kombinationer är vi vana vid inom konsten, men inte lika ofta inom matematiken.

Gödels teorem öppnade en helt ny dimension för matematiska upptäckter, en dimension som för matematiken och humaniora närmare varandra. Hans verk inspirerade andra att utforska denna rika dimension, bland dem inte minst Alan Turing, vars verk är nära besläktat med Gödels. Vi försöker fortfarande orientera oss i



konsekvenserna av deras landvinningar.

Låt mig bara tillägga ytterligare en tanke, som jag tvingats reflektera över många gånger under de år som gått sedan jag först publicerade *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel* (2005). Dessa år har sett framväxten av trosföreställningar så säkra på sig själva – eller jag borde snarare säga *troende* så säkra på sig själva – att de är beredda att göra världen till ett levande helvete för andra. De verkar inte plågas av några tankar på kunskapens gränser. Det är inte första gången i människosläktets historia som epistemologisk dårskap förvandlas till mänsklig tragedi. I sådana tider kanske någon kan finna tröst i att studera ett rigoröst verk som avslöjar de subtila komplikationer som begreppet kunskap rymmer och de krav det ställer på oss, till och med inom det mest privilegierade område där bevis är möjliga.

– REBECCA NEWBERGER GOLDSTEIN

*juni 2015*



## Inledning

### *Exiler*

Sensommar i en småstad i New Jersey. Två män vandrar sakta längs en avsides väg, lågmält samtalande, med händerna på ryggen. Ett tjockt lövvalv ovanför skyddar dem från himlen. Långt bort från vägen ligger ståtliga gamla hus och på andra sidan, precis bortom almarna, utbreder sig en golfbanas frodiga gröna matta, varifrån spelarnas dämpade röster hörs som på långt avstånd.

Men intrycket till trots är detta inte bara ännu en avskild föroret befolkad uteslutande av klubbhusens folk, med män som dagligen pendlar in till stan för att upprätthålla välståndet. Nej, det här är Princeton, New Jersey, platsen för ett av världens främsta universitet, som därmed hyser en långt mer skiftande befolkning än vad en första anblick avslöjar. Vid den här tiden, när dessa två män strövar hemåt på en lugn bakväg, har Princetons befolkning blivit än mer kosmopolitisk, eftersom många av Europas främsta tänkare befinner sig på flykt undan Hitler. Som en amerikansk pedagog formulerade det: "Hitler skakar på trädet och jag samlar upp äpplena". En del av de mest utsökta äpplena har till slut rullat in i detta lilla hörn av världen.

Därför är det inte så förvånande att det språk de två vandrarna samtalat på är tyska. Den ene mannen, prydligt klädd i vit linnekostym med matchande filthatt, är ännu i trettioårsåldern, medan den andre, med säckiga byxor och hängslen i gammaldags stil,

närmar sig de sjuttio. Trots ålderskillnaden tycks de tala med varandra som jämlikar, låt vara att den äldre mannens ansikte då och dras upp i ett djupt ingraverat mönster av muntra rynkor, varpå han skakar på huvudet som om den andre nu sagt något *wirklich verrückt*, riktigt tokigt.

Vid den lövtäckta vägens ena ände, åt motsatt håll som de två männen går, ligger den splittrerna, georgianska röttegelbyggnaden för *Institute for Advanced Study* utbredd på en vidsträckt gräsmatta. Institutet har nu funnits i över ett decennium, inhyrt i Princetonuniversitetets gotiska matematikbyggnad. Men det begåvade inflödet från Europa har ökat Institutets prestige, och nu har man flyttat till ett eget rymligt campus, några få kilometer från universitetet, med en damm och en skogsdunge genomkorsad av stigar där undflyende idéer kan jagas ifatt.

*Institute for Advanced Study* utgör redan i början av 1940-talet en amerikansk anomali, befolkat av några få utvalda tänkare. En del av förklaringen till Institutets unika karaktär ligger kanske i att det vuxit fram genom en enda mans visionära idéer. År 1930 övertalade utbildningsreformatorn Abraham Flexner två arvtagare till en varuhuskedja i New Jersey, Louis Bamberger och hans syster Mrs Felix Fuld, att stifta ett nytt slags akademi, vigd åt "nyttan av onyttig kunskap". Bara veckor innan aktiemarknaden kraschade hade de två detaljhandelsmagnaterna, motiverade av sin filantropiska strävan, sålt sitt företag till R. H. Macy & Co; med en förmögenhet på 30 miljoner dollar hade de vänt sig till Flexner för råd om hur medlen kunde användas för att förbättra mänsklighetens medvetande.

Flexner, son till östeuropeiska immigranter, hade några år tidigare tagit på sig uppgiften att på egen hand avslöja den amerikanska läkarutbildningens usla tillstånd. Vid sekelskiftet fanns det ett överskott av läkarskolor, vilka tillhandahöll läkarexamina som ofta inte visade mer än att mottagaren betalat för den undervisning som krävdes. Enbart staten Missouri hade fyrtiotvå läkarskolor, staden Chicago fjorton. Flexners rapport, som avslöjade skojeriet

och publicerades av *Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching*, fick viss effekt. En del av värsta institutionerna packade ihop sina tält och smög sig iväg om natten.

Bamberger och Fuld var tacksamma mot sina forna stamkunder i New Jersey och ville ge något tillbaka. Deras första tanke var en läkarutbildning och därför skickade de sina representanter för att tala med den man som visste så mycket om hur medicin borde läras ut. (Flexners bror förestod den medicinska fakulteten vid Rockefelleruniversitetet, som Flexner tagit som sin modell). Men Flexner hyste drömmar ännu mer utopiska än att garantera att amerikanska läkare visste något om medicin. Hans tankar kring utbildningsreformer hade tagit en markerad vändning bort från det tillämpade och praktiska. Hans idé var att skapa en fristad för de renaste av tänkare, att förverkliga ordspråkets elfenbenstorn i solitt rödtegel: kort sagt, att skapa det som skulle bli känt som *Institute for Advanced Study*.

Här skulle den med vördnad utvalda fakulteten behandlas som de furstar *der reinen Vernunft* de var. De skulle erhålla en frikostig lön (något som fick vissa att kalla stället för "Institute for Advanced Salaries") liksom den ovärderliga lyxen av obegränsad tid att tänka, befriade från bördan att behöva förbereda föreläsningar för studenter och rätta deras provhäften – i själva verket befriade från bördan att ha studenter omkring sig överhuvudtaget. I stället skulle en ständigt förnyad ström av begåvade yngre akademiker, senare kända som de "tillfälliga medlemmarna", komma på ett- eller tvååriga besök för att injicera sin energi, ungdom och entusiasm som ett uppiggande tonikum i geniernas gudablod. "Det bör vara en fri sammanslutning av akademiker", skrev Flexner. "Fri, eftersom mogna personer som drivs av en intellektuell strävan måste tillåtas uppfylla sina egna syften på sitt eget sätt." Det borde tillhandahålla enkla men rymliga omgivningar "och framför allt lugn – frånvaron av distraktioner i form av vare sig världsliga bestyr eller föräldrans ansvar för omogna studenter". Bamberger och Fuld ville ursprungligen förlägga sin skola till Newark, New Jersey, men Flexner

övertalade dem att Princeton, med dess sekellånga traditioner av lärdom och skyddande lager av upphöjd stillhet, vore långt mer gynnsamt för att locka fram de önskade resultaten från genier i full frihet.

Flexner beslöt att bygga sin vision på matematikens fasta grund, ”den strängaste av alla discipliner”, som han formulerade saken. Av alla akademiker är matematikerna de som i viss mening befinner sig längst från tankar på ”den verkliga världen” – ett uttryck som i det här sammanhanget betyder mer än bara den praktiska världen av dagsaktualiteter. Uttrycket avser att täcka i stort sett allt som äger fysisk existens, förutom idéer, begrepp, teorier: tankens värld. Tankens värld kan förvisso handla *om* den verkliga världen, som den vanligen också gör; men så icke, vanligen, inom matematiken. På sitt extrema avstånd åtnjuter (eller genomlider) matematiker inte särskilt mycket uppmärksamhet från den stora allmänheten; men bland dem som lever ett tankens liv betraktas de med en särskild förundran för stringensen i sina metoder och säkerheten i sina slutsatser – unika drag som har att göra med just det som gör dem i stort sett onyttiga (”onyttiga” i den meningen att matematikers kunskap i sig själv inte har några praktiska konsekvenser, inte ger oss några medel att förändra våra materiella villkor, på gott eller ont).

Matematikens stringens och säkerhet uppnås *a priori*, vilket innebär att matematikern inte tar hjälp av några observationer för att komma fram till sina matematiska insikter,<sup>1</sup> samtidigt som

<sup>1</sup> Detta innebär emellertid inte att dessa övertygelser är medfödda, det vill säga att vi är utrustade med dem från födseln. Det är uppenbart att vi först måste förvärva begreppen, och språket för att uttrycka dem, innan vi kan komma till övertygelsen att  $5+7=12$ . Medföddhet är ett psykologiskt begrepp, medan aprioricitet är ett kunskapsteoretiskt, som har att göra med hur övertygelsen berättigas, vad som räknas som evidens både för och emot den. (Två typer av noter kommer att användas i den här boken: fotnoter för att vidareutveckla en tanke på samma sida, slutnoter för att ange källor för citat.)