

Karl
fri tanke
Sigmund
ÖVERSÄTTNING CLAES BERNES

TANKENS GEOMETRI
MATEMATIKENS FILOSOFIHISTORIA

Innehåll

Inledning	7
-----------------	---

DEL I

1. Geometri	15
2. Tal	45
3. Oändlighet	69
4. Logik	97
5. Beräkning	125

DEL II

6. Gränsvärden	159
7. Sannolikhet	185
8. Slumpmässighet	209

DEL III

9. Röstning	239
10. Beslut	255
11. Samarbete	275
12. Samhällsfördrag	309
13. Rättvisa	331

DEL IV

14. Språk	359
15. Filosofi	381
16. Insikt	399

Tack	427
Litteraturhänvisningar	429
Bibliografi	447
Bildkällor	469

Inledning

MATEMATIKEN OCH FILOSOFIN har haft ihop det i evigheter. Den här boken beskriver i inte alltför allvarsam anda några av deras mest minnesvärda möten.

De två ämnena är till synes som gjorda för varandra. Matematiken är ett användbart redskap för både teoretisk och praktisk filosofi. Kunskapsteorin tar exempelvis upp begrepp såsom rum och slump, som står i centrum för geometrin respektive sannolikheteSTEORIN; etiken tar upp frågor såsom rättvisa och samhällsfördrag, som spelteorin kan kasta ljus över, och så vidare. Samtidigt är matematiken i sig en av de mest gåtfulla och givande källorna till filosofiska problem. Det står helt klart att den inte är en empirisk vetenskap, så varför fungerar den så praktiskt? Är den uppfunnen eller upptäckt? Och vad är det som gör att matematisk kunskap verkar vara så tillförlitlig?

Sådana frågor kommer att föra oss ut på underhållande, informativa och emellanåt kringflackande utflykter i det mänskliga tänkandets historia, där vi möter en del synnerligen särpräglade personligheter som samtliga är kända medlemmar av Döda tänkares sällskap. Filosofiska och matematiska tänkesätt är helt olika varandra, men de har ofta följt parallella banor. Det har funnits tider då filosofer och matematiker inte gick att skilja från varandra. De tiderna blir allt mer avlägsna, men faktum kvarstår att de båda ämnena har förunderliga sätt att stimulera och ofta överraska varandra. De två syskonen från Grekland tycks vara förutbestämda att för evigt förbli sammansnärjda, i en komplex och ibland svindlande vals – och inte utan att ibland trampa varandra på tårna. Vi ska följa hur de svänger omkring.

Det finns många illustrationer men mycket få formler i boken. Den är inte tänkt att vara annat än en guidebok för rundvandringar. Texten har inte särskilt mycket att säga om matematikens filosofi i sig, som är ett krävande ämne, men i gengäld beskriver den tillämpningar av

matematik på alla möjliga filosofiska frågor, från moral till logik, och med tonvikt på historiska märkligheter under ett uråldrigt sökande. Detta sökande kommer med all säkerhet att fortsätta, särskilt med tanke på att dagens explosiva utveckling inom artificiell intelligens lär radera en del korthus som har byggts med förnuftets hjälp, och ge oss nya kort på handen.

Första delen av boken handlar om rum, tal, algoritmer, axiom och bevis. Den följer utvecklingen av matematikens självbild, en kortversion av den långa officiella historia som går från Euklides till Turing, eller snarare från Thales till Hales (vilket inte är avsett som en ordlek!). Thales var den halvt mytiska gestalt från Miletos vid Joniska havets kust som ungefär hundra generationer tillbaka i tiden kanske (eller kanske inte) var först med att tänka tanken att ett matematiskt bevis kan förmedla insikt och visshet. Thomas Hales är en nutida amerikansk matematiker som blev känd för ett bevis som var så komplext att ingen kunde känna sig helt säker på att det var giltigt. Hales undanröjde sedan allt tvivel genom att övertyga en dator.

Matematikens utveckling mellan dessa båda milstolpar innefattade drastiska perspektivförändringar som i hög grad sysselsatte både matematikers och filosofers tankar. På menyn stod den rumsliga åskådningens roll; parallellaxiomets öde; skilsmässan mellan de matematiska och fysiska rummen; talens natur och syfte; oändligheten, omgiven av sin aura av tabun och skandaler; de incestuösa relationerna mellan matematiken och logiken. Alla dessa frågor genomgick sekler av utveckling, interfolierade av fullskaliga revolutioner, och alla ledde till märkliga kontakter (näst intill kontakter av tredje graden) mellan matematiker och filosofer.

Bokens andra del handlar om slumpen och kontinuet. Det sistnämnda försåg tänkare som Zenon från Elea med gåtor som kunde förvirra de skarpaste hjärnor och fyllde antikens matematik med obehag. Det var först i renässansens efterdyningar, under alkemisternas glansdagar, som vissa intellektuella äventyrare började utveckla infinitesimalkalkyl. Deras mål var att nå gränsen genom ett våghalsigt kliv – en så kallad gränsövergång – och att dela upp det ändliga i oändligt många oändligt små delar. Nästan samtidigt fick man bukt

med begreppet sannolikhet. Detta var den tid då matematiker med sönmgångares självsäkerhet tog sig bortom det sunda förnuftet. Ingen förstod egentligen hur slump går att förena med kausalitet, eller hur det infinitesimala kunde vara mindre än allt annat men ändå inte noll. Det enda som tycktes spela någon roll var att det hela fungerade. Så småningom visade det sig att sannolikhetskalkyl och beräkning av volymer kunde genomföras med samma analytiska redskap. Matematikerna vande sig vid att trotsa förnuftet. De började också irritera filosoferna.

Den tredje delen av boken tar upp praktisk filosofi: moral och ekonomi, politik och juridik. Platon rekommenderade en gång att fulländade härskare till att börja med skulle ägna sig åt matematik i tio år. Tack och lov blev det ingenting av det förslaget. Men 2000 år senare började en del matematiker faktiskt begrunda vad som var gott och eftersträvansvärt. Oförargligt nog inleddes detta med studier av röstningsförfaranden, i en tid då demokrati bara var en önskedröm för radikaler och den enda republiken var »de lärdas republik«. Lite senare väckte Jeremy Bentham löje med idén om »lyckokalkyl«, men begreppet »nytta« fick fäste inom nationalekonomin. Med tiden vände sig nyttan mot sig själv och kastade en skugga över vår optimistiska självbild som »förnuftiga varelser«.

Under den oskyldiga rubriken »spelteori« började matematiken framåt mitten av 1900-talet studera intressekonflikter. Sådana konflikter utgör själva existensberättigandet för all moral och alla lagar. I dag känns det svårt att förstå hur filosofer någonsin kan ha funderat över själviskhet, samarbete eller samhällsfördrag utan att ta hjälp av fångarnas dilemma eller hjortjaktsspelet. På motsvarande sätt är också begreppet rättvisa och uppkomsten av normer för ägande vid det här laget fullt etablerade som matematiska frågor (vilket inte behöver betyda att vi förstår dem bättre än förr).

Bokens fjärde och sista del försöker närma sig matematiken utifrån, som när man stiger i land på en okänd kust och bekantar sig med infödingarna. Det första kapitlet tar en titt på matematikens språk, eller närmare bestämt dess skrift. Detta kvasigrafologiska synsätt avslöjar att infödingarna för närvarande upplever en för-

ändring som ser ut att accelerera i svindlande takt. Omvälvningen beror förstås på digitaliseringen (ett ord som syftar på fingrarna man använder för att räkna). Datorn, detta matematiska påfund, åstadkommer en radikal omvandling av matematiken på fler sätt än vad som ännu går att överblicka. Nästa kapitel är en hedersbetygelse åt matematikens filosofi, ett ärevärdigt ämne som i dag tycks ägna sig nästan lika mycket åt sig självt som åt matematiken. Och sista kapitlet tar upp den gåta som i mångas ögon kan tyckas vara den allra största, nämligen varför matematiken är till så stort nöje för en del av oss (men inte för alla).

För egen del har jag varit förtjust i matematik så länge jag kan minnas. Jag kommer så väl ihåg den mysiga hemmakväll när lilla jag noggrant mätte upp vinklarna i en triangel, adderade dem till varandra och fann att min far hade rätt! Under min uppväxt i Wien stötte jag snart på spåren efter Ludwig Wittgenstein, Kurt Gödel och Wienkretsen, och jag kunde inte låta bli att fundera över deras vitt skilda åsikter. Även andra upplevelser satte sin prägel på mig. Jag ägnade en stor del av mitt yrkesliv (kanske den bästa) åt att undervisa i matematik på akademisk grundnivå och se hur studenterna inom loppet av några månader skaffade sig ett specifikt tänkesätt som blivande matematiker. Det kändes som att bevittna en initiationsrit. Min forskning handlade till en början om dynamiska system i gränslandet mellan deterministiska och probabilistiska modeller. Senare övergick jag till evolutionär spelteori. Det förstnämnda ämnet inspirerade till tankar om teoretisk filosofi, det sistnämnda till tankar om praktisk filosofi. Trots denna nyttiga stimulans har jag dessvärre inte blivit expert på vare sig det ena eller det andra. I den här boken har jag i själva verket inte berört ett enda ämne där det inte finns många som är mer kunniga. Min ursäkt får bli att jag bara har velat åstadkomma en lättsam överblick över ett väldigt område, i form av en serie stillsamma strövtåg där jag ibland återvänder till utgångspunkten från ett annat håll och ibland stannar upp för att njuta av utsikten.

Med detta sagt måste jag erkänna att jag emellanåt fick ett slags *Den gamle och havet*-känsla när jag skrev den här boken, nämligen att

Inledning

jag hade fått en fisk på kroken som var alldeles för stor för mig och
som släpade bort mig och min jolle, gud vet vart ...

Jag får väl ta det filosofiskt.

Del I

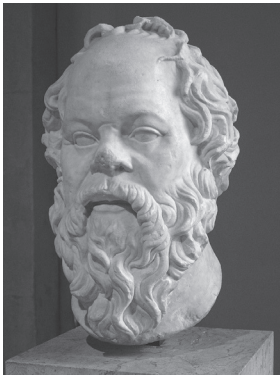
I.

Geometri

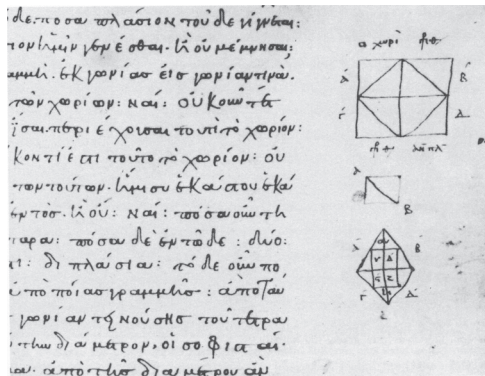
DEN NAMNLÖSES MINNEN

Återerinringens konst

DEN INLEDANDE SCENEN utspelar sig i Aten, i en villa tillhörande en skum politiker vid namn Anytos. Den unge Menon, blivande militär ledare, är på besök. Också Sokrates råkar vara där. Menon tar genast tillfället i akt och frågar denne om dygd kan läras ut – ett lockbete som Sokrates alltid har nappat på. Knepet tillförsäkrade Menon en plats i evigheten. Han dog kort därefter i de persiska krigen, under tvivelaktiga omständigheter, men en av Platons dialoger blev uppkallad efter honom.



FIGUR I.1. Sokrates
(469–399 f.v.t.).



FIGUR I.2. En sida ur *Menon*.

Menon är ett av Platons tidigaste verk. Det är här som filosofen för första gången presenterar en av sina favoritidéer: Det finns en kunskap som vi lär oss genom att vi drar oss den till minnes. Vår odödliga själ har känt till den hela tiden. Vi behöver bara gräva fram den.

Grekerna har ett ord för denna återvinning av begravd kunskap: anamnesis. Vi kan tycka att det begreppet är hopplöst föråldrat, en kvarleva från ett vidskepligt tidevarv. Likafullt ledde det till ett av de mest aktningsvärda och rentav spännande mötena mellan filosofin och matematiken. Det mötet ägde rum när Sokrates åtog sig att försvara sin märkliga idé genom att inför Menon utföra ett experiment med fulländad minneskonst.

En av de slavar som uppehåller sig i närheten blir ombedd att komma fram, en pojke vars fullständiga brist på bildning står utom allt tvivel. Genom skicklig utfrågning får Sokrates pojken att upptäcka en geometrisk sats som han definitivt aldrig hade hört talas om tidigare. Sokrates slutsats är att pojken måste ha känt till den från början. Han hade bara varit omedveten om den. Med hjälp av försiktig sondering kom hans dolda kunskap i dagen. Uttryckt i nutida ordalag hade en del av det undermedvetna blivit medvetet, precis som under en session på dr Freuds soffa. Självt liknade Sokrates sin roll vid en barnmorskas – han hade helt enkelt hjälpt pojken att *återerinna* sig något som han hade glömt.

Hela episoden tog bara en kvart. Pojken återvände efteråt till sin tillvaro i simpel okunnighet. Han förstod aldrig vad all utfrågning hade handlat om, och inte heller att den hade gett honom hans femton minuter av berömmelse – eller snarare (eftersom ingen hade frågat efter hans namn) femton minuter av odödlighet. Sokrates och Menon återgick till sin diskussion om vad dygd går ut på.

Det är betecknande att Sokrates valde geometri för sitt experiment, inte någon annan vetenskap såsom fysik eller geografi. Med sin välutvecklade dialektiska förmåga hade han förmodligen också kunnat få slavpojken att minnas att Kreta är en ö eller att allt består av vatten, eld, luft och jord. Men Sokrates föredrog att resonera om en geometrisk sats, eftersom inget annat kan framstå som en evig sanning med större trovärdighet.

Pojken hade blivit ombedd att utifrån en given kvadrat konstruera en kvadrat med dubbelt så stor area. I skolan har vi lärt oss att sidorna på den större kvadraten måste vara $\sqrt{2}$ gånger längre än den ursprungliga kvadratens sidor. De måste alltså vara lika långa som diagonalerna i den ursprungliga kvadraten. Men att prata om kvadratrötter kom inte på fråga. Faktum är att Sokrates inte ens nämnde någon kvadrat. Han pratade om en fyrsiding vars sidor är lika långa (figur 1.3). Detta räcker inte som definition av en kvadrat, men Sokrates tillfogade – utan tvivel med hjälp av en teckning i stil med figur 1.4 – att dess diagonaler är lika långa. Det säkerställer att fyrsidingen med lika långa sidor faktiskt blir en kvadrat.



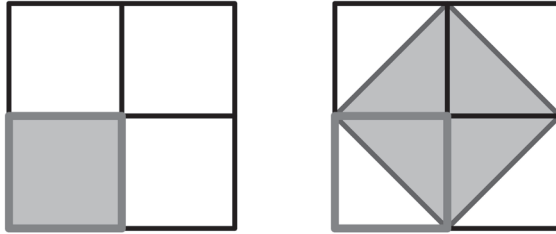
FIGUR 1.3. En romb är en fyrsiding vars sidor är lika långa.



FIGUR 1.4. En kvadrat är en romb vars diagonaler är lika långa.

Sokrates kunde i stället ha angett att alla vinklar skulle vara lika. Också det villkoret säkerställer att en fyrsiding med lika långa sidor är en kvadrat. Men han föredrog att introducera diagonaler redan i början av frågestunden, liksom i förbigående – ett finurligt val, eftersom diagonalerna ifråga till sist visar sig stå för lösningen (figur 1.5). Sokrates lät pojken följa sin egen väg mot det målet och rättade varsamt hans misstag. Borde sidlängden fördubblas? Nej, det duger inte; det ger upphov till en kvadrat som har *fyra* gånger den ursprungliga kvadratens area. Borde sidlängden multipliceras med en och en halv? Nej,

det är fortfarande för mycket. Och på det sättet fortlöper dialogen tills Sokrates slutligen har lockat fram det rätta svaret från pojken.



FIGUR 1.5. Den grå kvadraten till höger har dubbelt så stor area som den grå kvadraten till vänster.

I nästa kapitel kommer vi att se att motsvarande problem i tre dimensioner är olösligt. Detta är det deliska problemet, som har fått sitt namn efter den lilla ön Delos i Egeiska havet. Ett trettioårigt år innan Sokrates hade sin pratstund med Menon hade pesten härjat i Grekland. Perikles dog i den. Som vanligt när det gäller epidemier fanns det experter som visste precis vad som skulle göras. »Fråga ett orakel«, sade de. Och se, oraklet hade ett råd att ge: fördubbla storleken hos det kubformade altaret som står i Apollons tempel, så kommer ni att blidka gudarna. I dag är pesten borta, och altaret har försvunnit. Apollon har dragit sig tillbaka. Men det deliska problemet är fortfarande olöst. I själva verket vet vi – vi har *bevisat* – att det kommer att förbli olöst för all framtid. Så förståndigt det var av Sokrates att inte be pojken erinra sig lösningen.

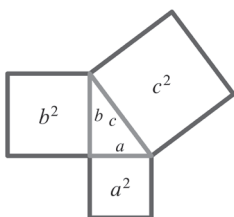
Tre vinklar för Euklides

Geometrin var den första matematiska gren som verkligen kom att blomstra. Orsaken kan ha varit att den var till uppenbar nytta för arkitekter, sjöfarare och lantmätare. Men troligare är att den blomstrade för att den är vacker. Även de enklaste geometriska figurer, såsom triangeln, är fascinerande. Inom musiken är triangeln ett blygsamt instrument som döljer sig någonstans längst bak i orkestern. Inom matematiken intar trianglarna en framskjuten plats – de var de allra första objekt som fångslade tidiga grekiska tänkare såsom Thales från Miletos och Pythagoras från Samos. Trianglar brukar också vara de första matematiska figurer som fångar intresset hos barn.

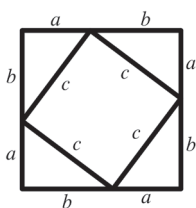
Pythagoras sats (figur 1.6) är en av de äldsta geometriska satserna. Om a , b och c är sidlängderna hos en rätvinklig triangel (där c står för hypotenusan, den sida som står mitt emot den räta vinkeln), så gäller att $a^2 + b^2 = c^2$. Detta faktum hade redan egyptierna, indierna och babylonerna känt till, men Pythagoras var (möjligen? troligen?) den förste som åstadkom ett bevis.

Vad är ett bevis? För de gamla grekerna var det ett resonemang som fick alla att inse varför ett påstående är sant – precis som när slavpojken plötsligt insåg varför diagonalen i en kvadrat utgör sidan hos en kvadrat av dubbla storleken.

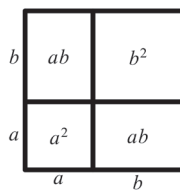
Det finns många bevis för Pythagoras sats. Det vanligaste av dem bygger på figur 1.7 (som i fallet $a = b$ kan hämtas mer eller mindre direkt från *Menon*). Den stora kvadraten, med sidlängden $a + b$, delas i



FIGUR 1.6.
Pythagoras sats.



FIGUR 1.7.
Ett steg i beviset av satsen.

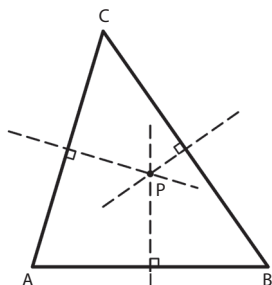


FIGUR 1.8.
Ett annat steg i beviset.

fem delar: fyra upplagor av den rätvinkliga triangeln plus den kvadrat som bildas av deras hypotenusor. Varje triangel har arean $\frac{ab}{2}$, vilket sammanlagt ger $2ab$. Vi får $c^2 = (a + b)^2 - 2ab$ genom att helt enkelt avlägsna de rätvinkliga triangelarna från den stora kvadraten.

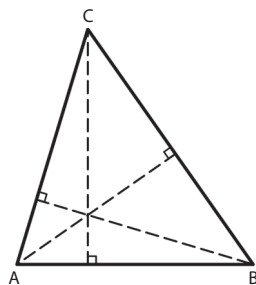
En annan uppdelning av samma »stora« kvadrat med sidlängden $a + b$ (se figur 1.8) ger ekvationen $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Sätter vi in detta i föregående ekvation får vi $c^2 = a^2 + b^2$, vilket skulle bevisas.

I skolan lär vi oss ett och annat om trianglar (dock inte lika mycket som man fick lära sig förr). Exempelvis att mittpunktsnormalerna till de tre sidorna i en triangel skär varandra i en och samma punkt. Att så är fallet framgår direkt av figur 1.9. Låt P vara punkten där



FIGUR 1.9.

Mittpunktsnormalerna skär varandra i en och samma punkt.



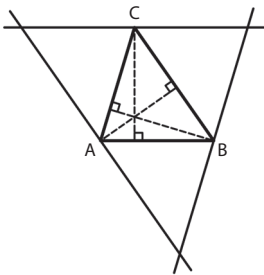
FIGUR 1.10.

Triangelns höjder skär varandra i en och samma punkt.

mittpunktsnormalerna till sidorna AB och AC skär varandra. Eftersom P ligger på mittpunktsnormalen till AB är avstånden från P till A och B lika stora. Av motsvarande skäl är avstånden från P till A och C lika stora. Följaktligen är avstånden från P till B och C lika stora, vilket betyder att P ligger på mittpunktsnormalen till BC. Härav inser vi också att P utgör centrum i den cirkel som går genom A, B och C.

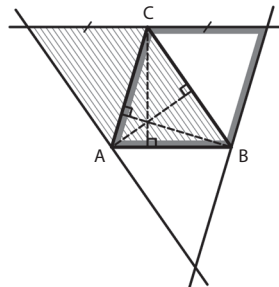
Här är en mycket likartad sats: de tre höjderna i en triangel skär varandra i en och samma punkt (se figur 1.10). Men nu är beviset lite mer krävande. Kan du komma på det själv? Minns du att du såg det i skolan (eller i något tidigare liv, som Platon kunde ha förväntat sig)?

Här är ett knep som underlättar. Dra linjer genom A, B och C som är parallella med triangelns tre motstående sidor (se figur 1.11). Detta ger upphov till en stor triangel. Med hjälp av parallelogram är det lätt att inse att punkterna A, B och C utgör mittpunkterna på den nya triangelns sidor (figur 1.12). Höjderna i triangeln ABC är vinkelräta mot dessa sidor. Följaktligen utgör de den nya triangelns mittpunktsnormaler. Den egenskapen innebär att de skär varandra i en och samma punkt, vilket skulle bevisas.



FIGUR 1.11.

Ett bevis för att triangelns tre höjder
skär varandra i samma punkt.

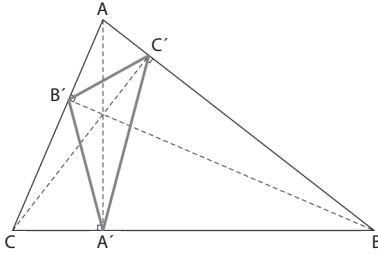


FIGUR 1.12.

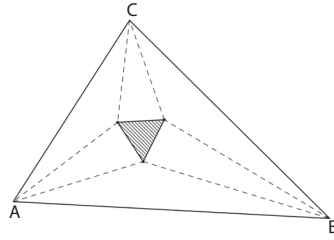
Nästa steg i beviset.

Många satser om trianglar är tvåusen år gamla, men många andra är mycket nyare. Faktum är att de grekiska geometrikerna skulle slita sitt hår om de fick höra hur mycket de hade missat.

Ett exempel är att triangeln vars hörn A' , B' och C' utgör fotpunkterna till de tre höjderna i en spetsvinklig triangel ABC (alltså den så kallade fotpunktstriangeln $A'B'C'$, se figur 1.13) har den minsta omkretsen av alla trianglar som är inskrivna i ABC (dvs. har sina tre hörn på sidorna mitt emot A, B och C). Ett gummiband som spändes över de tre sidorna i triangeln ABC skulle genom att dra ihop sig sammanfalla med $A'B'C'$. De gamla grekerna hade inga gummiband, men satsen skulle ha fascinerat dem. Den formulerades av Leonhard Euler på 1700-talet.



FIGUR 1.13.
En av Eulers satser.



FIGUR 1.14.
Morleys sats.

Här är ett annat exempel: Det är välkänt att bisektriserna till vinklarna i en triangel möts i en och samma punkt. Låt oss i stället titta på trisektriserna (de linjer som delar en vinkel i tre lika delar). Det visar sig att i vilken triangel som helst bildar de tre skärningspunkterna mellan angränsande trisektriser till olika vinklar en liksidig triangel (figur 1.14). Det är ett nästan magiskt resultat. Beviset är knepigt, minst sagt. H. S. M. Coxeter, 1900-talets främste geometriker, uttryckte det som att »vi utsätter oss för stort besvär om vi försöker oss på ett direkt tillvägagångssätt«. Men obekymrad av denna varning fann den brittiske matematikern John H. Conway för tio år sedan ett enastående snillrikt bevis som rymdes på en enda sida.

Falsk evidens

Bevisen inom den euklidiska geometrin kan vara extremt sofistikerade och fulla av geniala och överraskande steg. Men varje steg ter sig genast självklart. Det var detta åberopande av det uppenbara som övertygade Platon och Pythagoras om att det riktiga i geometriska resonemang inte gick att ifrågasätta. Att *se* kvadraten på diagonalen är att *förstå* att den har dubbelt så stor area som den ursprungliga kvadraten. Att *se* att höjderna i en triangel utgör mittpunktsnormalerna i en annan är att *förstå* att de skär varandra i en och samma punkt.